الرياضيات

10

التحليل (5)

1

السنة: الثالثة

الفصل: الثاني

الدكتور: نايف طلي

أهلا بكم أصدقائي بمقررنا التحليل 5 وهي تتمة لسلسلة التحاليل 1و2و3و4 لكنه يعتمد على تحليل 1 كأساس، لكن سنبدأ بعدّة تعاريف بسيطة من تحليل 1 حتى نراجع معلوماتنا جيداً ثم نبني عليها.

لكن قبل البدأ لنتعرف على مفردات مقررنا:

1) الدوال ذات التغير المحدود:

مقدمة في تحليل 5.
تعريف الدوال ذات التغير المحدود.
خواص الدوال ذات التغير المحدود.
معايير الدوال ذات التغير المحدود.
تطبيقات الدوال ذات التغير المحدود.

2) تكامل استيلجس:

يضم حل مسألة استيلجس وهي: حساب التكاملات من الشكل

$$\int_a^b f(x)d[x]$$

حيث $[x]$ دالة الجزء الصحيح

3) مقدمة في نظرية القياس:

تعتمد على المجموعات-التوبولوجيا-التحليل.
نتناول فيها تعاريف جديدة مثل فضاء القياس، الدالة القيوسة...
أيضاً نتعلم في هذا البحث ما هو مفهوم طول مجموعة (فكرة القياس من قياس المجموعات)

4) تكامل لوبيغ:

يعتمد على نظرية القياس ويحسب تكاملات لوبيغ وهي من الشكل:

$$\int_A f(x)d\mu$$

أي أن التكامل على مجموعة ما A وليست بالضرورة على مجال، والمكاملة بالنسبة لدالة قيوسة μ، وسنتعلم ما تعنيه هذه الكتابة في الوقت المناسب

أي أن لدينا 3 أنواع من التكاملات:

تكامل ريمان الذي من الشكل $\int_a^b f(x)dx$

تكامل استيلجس الذي من الشكل $\int_a^b f(x)d[x]$

تكامل لوبيغ الذي من الشكل $\int_A f(x)d\mu$

المراجع:

-تحليل 5 للدكتور محي الدين بحبوح والدكتور جمال مللي. (الدكتور نايف استمد مقدمة مقرر تحليل 5 منه) والكتاب غير متوفر في المستودع.
-تحليل 5 للدكتور ابراهيم ابراهيم (د.نايف استمد منه الفصلين 1 و2).
الكتاب غير متوفر في المستودع لكن الفصلين 1و2 متوفرين في مكتبة $PLUS$ ☺.

والآن لنبدأ بمحاضرتنا

سوف نتطرق بهذه المحاضرة الى المواضيع التالية:

- تعريف الدالة وبعض صفاتها
- الدالة المطردة / نتائج / أمثلة.
- الدالة المحدودة / نتائج.
- نهاية الدالة عند نقطة.
- استمرار الدالة عند نقطة – مجال.
- نقاط الانقطاع
- القفزة –مبرهنات.

تعريف الدالة:

- نقول عن العلاقة f المعرفة بالشكل: $f: X \longrightarrow Y$ أنها دالة إذا تحقق:

$$\forall\, x \in X\,;\, \exists!\; y \in Y\;;\; f(x) = y$$

نقول عن الدالة انها دالة عددية اذا كان $Y \subseteq \mathbb{R}$,

ملاحظة: الرمز !∃ يعني يوجد وبشكل وحيد. الفاصلة المنقوطة ; تعني حيث. النقطتان : تعني فإن.

بعض صفات الدوال

ليكن لدينا التطبيق $f: D_f \to \mathbb{R}_f$ عندئذ

الدالة المتباينة:

نقول عن التطبيق f أنه متباين اذا حقق:

$$\forall x_1, x_2 \in D_f : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

(تساوي الصور ⇐ تساوي العناصر)

حسب المكافئ العكسي نجد أن $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

التباين يعني أن كل عنصر من المستقر يرتبط بعنصر واحد على الأكثر من المنطلق

الدالة الغامر:

نقول عن التطبيق f أنه غامر اذا حقق:

$$\forall y \in R_f ; \exists x \in D_f : g(x) = y$$

أي أن كل عنصر من المستقر يرتبط بعنصر واحد على الأقل من المنطلق.

ملاحظة: اذا أخذنا المستقر الفعلي للدالة تكون الدالة غامرة

التطبيق التقابل:

نقول عن f أنه تقابل اذا كان f غامر + متباين

ويمكن ايجاد التطبيق العكسي

يكون المنحني تطبيق اذا اخذنا مستقيم يوازي المحور oy فيجب أن لا يقطع المنحني الا بنقطة واحدة

يكون المنحني تطبيق غامر اذا اخذنا مستقيم يوازي المحور ox فيجب أن لا يقطع المنحني الا بنقطة واحدة

الدالة الزوجية:

نقول عن f أنها زوجية اذا حققت:

$$1)\ \forall x \in D_f ; -x \in D_f$$
$$2)\ f(-x) = f(x)$$

الخط البياني للدالة الزوجية متناظر بالنسبة للمحور yy'.

الدالة الفردية:

نقول عن f أنها فردية اذا حققت:

$$1)\ \forall x \in D_f ; -x \in D_f$$
$$2)\ f(-x) = -f(x)$$

الخط البياني للدالة الفردية متناظر بالنسبة للمحور للمبدأ $O(0.0)$.

ملاحظة: يمكن أن تكون الدالة ليست زوجية ولا فردية

أمثلة:

$f(x) = x^2$ دالة زوجية

$f(x) = x$ دالة فردية

$f(x) = x + 1$ دالة ليست فردية ولا زوجية

الدوال المطردة:

نقول عن الدالة f أنها مطردة على المجال $X \subseteq \mathbb{R}$ إذا كانت متزايدة أو متناقصة أو متزايدة تماماً أو متناقصة تماماً على هذا المجال. **حيث**:

- f متزايدة على X إذا تحقق:

$$\forall\ x_1 . x_2 \in I\ ;\ x_1 < x_2\ : f(x_1) \le f(x_2)$$

- f متناقصة على X إذا تحقق:

$$\forall\ x_1 . x_2 \in I\ ;\ x_1 < x_2 : f(x_1) \ge f(x_2)$$

- f متزايدة تماماً على X إذا تحقق:

$$\forall\ x_1 . x_2 \in I\ ;\ x_1 < x_2 : f(x_1) < f(x_2)$$

- f متناقصة تماماً على X إذا تحقق:

$$\forall\ x_1 . x_2 \in I\ ;\ x_1 < x_2 : f(x_1) > f(x_2)$$

نتائج

إذا كانت الدالة f متزايدة على I فإن الدالة $(-f)$ متناقصة على I والعكس صحيح.

إذا كانت الدالة f متزايدة تماماً على I فإن الدالة $(-f)$ متناقصة تماماً على I والعكس صحيح

أمثلة:

$f(x) = x^2$

متزايدة على المجال $]0.\infty[$ ومتناقصة على المجال $]-\infty.0[$

$f(x) = -x^2$

متناقصة على المجال $]0.\infty[$ ومتزايدة على المجال $]-\infty.0[$

$f(x) = x$ متزايدة دوماً.

$f(x) = -x$ متناقصة دوماً.

الدوال المحدودة: نقول عن الدالة أنها محدودة على المجال $\mathrm{I} \subseteq \mathbb{R}$

إذا تحقق: $\exists M > 0; |f(x)| \leq M. \forall x \in I$

أو: $\exists m. M \in \mathbb{R}\ ;\ m \leq f(x) \leq M\ .\ \forall x \in I$

نتيجة: إذا كانت f معرفة ومطردة على $[a.b]$ فإن f محدودة عليه.

أمثلة:

$f(x) = \frac{1}{x}$ دالة محدودة على المجال $[1.\infty[$ أما على المجال $]0.\infty[$ غير محدودة

حالات خاصة:

اذا كانت f معرفة على $[a.b]$ ومتزايدة فإن

$$f(x) \leq f(b)\ ; \forall x \in [a.b]$$

اذا كانت f معرفة على $[a.b]$ ومتناقصة فإن

$$f(x) \leq f(a)\ . \forall x \in [a.b]$$

نهاية دالة عند نقطة:

نقول عن الدالة f أن لها نهاية عند x_0 اذا كانت f معرفة في جوار x_0 (الجوار المحذوف) وتحقق الشرط

$$\exists A \in \mathbb{R};\ \lim_{\substack{< \\ x \to x_0 \\ >}} f(x) = A$$

أو يكتب

$$\lim_{\substack{< \\ x \to x_0}} f(x) = \lim_{\substack{> \\ x \to x_0}} f(x) = A$$

ملاحظة:

يمكن التعبير عن النهاية من اليمين بالشكل $f(x_0 + 0)$

يمكن التعبير عن النهاية من اليسار بالشكل $f(x_0 - 0)$

مثال: أوجد نهاية الدالة $g(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ عند النقطة $x = 1$

$$\lim_{\substack{< \\ x \to x_0 \\ >}} g(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} x + 1 = 2$$

نلاحظ أن الدالة غير معرفة عند النقطة ولكن وجدنا نهاية للدالة عندها

الاستمرار:

نقول عن الدالة انها مستمرة عند النقطة x_0 اذا كانت الدالة معرفة في جوار x_0 وتحقق الشرط:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\<}} f(x) = \lim_{\substack{x\to x_0\\>}} f(x) = f(x_0)$$

أو $f(x_0+0) = f(x_0-0) = f(x_0)$

الاستمرار على المجال:

نقول عن الدالة أنها مستمرة على المجال $[a,b]$ اذا تحقق ما يلي:

1) مستمرة عند كل نقطة من نقاط المجال $]a,b[$

2) $\lim_{\substack{x\to x_0\\>}} f(x) = f(a)$

3) $\lim_{\substack{x\to x_0\\<}} f(x) = f(b)$

نقاط الانقطاع:

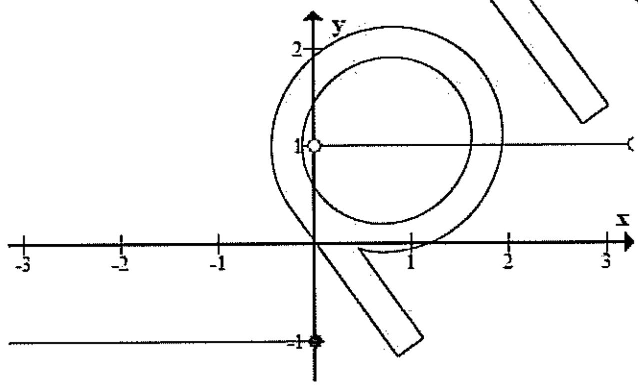
نقول عن x_0 أنها نقطة انقطاع للتابع f المعرف على $\mathrm{I} \subseteq \mathbb{R}$ إذا كانت غير مستمرة عند هذه النقطة.

أنواع نقاط الانقطاع:

1- نقاط انقطاع من النوع الأول:

نقول عن x_0 أنها نقطة انقطاع من النوع الأول للتابع f إذا تحقق:

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\>}} f(x) = A \in \mathbb{R} \\ \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\<}} f(x) = B \in \mathbb{R} \end{cases} \quad ; A \neq B$$



مثال:

$$f(x) = \frac{|x|}{x}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; x > 0 \\ -1 & ; x \leq 0 \end{cases}$$

---

2) نقطة انقطاع من النوع الثاني:

نقول عن x_0 أنها نقطة انقطاع من النوع الثاني للتابع f إذا كانت إحدى النهايتين من (اليمين أو اليسار) هي $\infty -$ أو$\infty +$ أو غير موجودة.

مثال:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & ; x > 0 \\ x^2 & ; x \leq 0 \end{cases}$$

$x_0 = 0$ نقطة انقطاع من النوع الثاني لأن

$$\lim_{\substack{x\to 0\\>}} \frac{1}{x} = +\infty \quad . \quad \lim_{\substack{x\to 0\\<}} x^2 = 0$$

القفزة:

إذا كان التابع f معرف على $[a.b]$ نعرّف:

1) القفزة عند $x_0 \in]a.b[$:

$$f(x_0+0)-f(x_0-0)$$

2) القفزة من يمين $x_0 \in]a.b[$:

$$f(x_0+0)-f(x_0)$$

3) القفزة من يسار $x_0 \in]a.b[$:

$$f(x_0)-f(x_0-0)$$

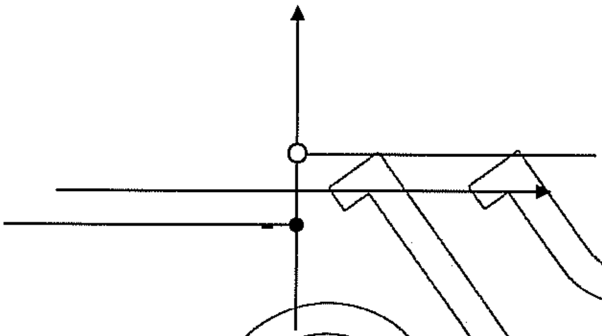
4) القفزة عند a من اليمين:

$$f(a+0)-f(a)$$

5) القفزة عند b من اليسار:

$$f(b)-f(b-0)$$

اضافي للاطلاع:



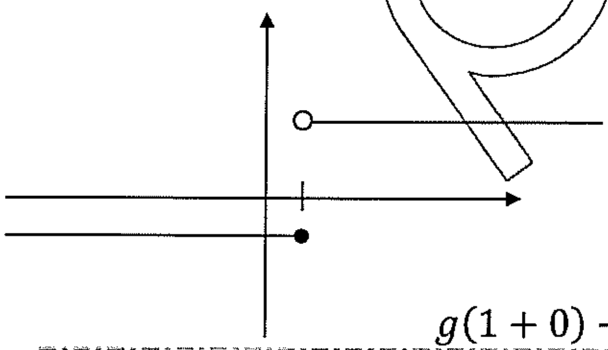
ماذا تعني القفزة بالتحديد؟؟ لنأخذ مثالاً

$$f(x)=\begin{cases}1 & ; x>0\\ -1 & ; x\le 0\end{cases}$$

القفزة عند $x=0$ هي:

$$f(0+0)-f(0-0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)-\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)=1-(-1)=2$$

وكأنها تمثّل الفرق بين طرفي الدالة بجوار $x=0$.



مثال آخر:
$$g(x)=\begin{cases}2 & ; x>1\\ -1 & ; x\le 1\end{cases}$$

فإن القفزة عند $x=1$ من اليمين:

$$g(1+0)-g(1)=2-(-1)=3$$

مبرهنات:

1_ إذا كانت f معرفة على $[a.b]$ ومطردة عليه فإن جميع نقاط الانقطاع هي من النوع الأول إن وجدت.

2_ مجموعة نقاط الانقطاع للدوال المطردة هي مجموعة منتهية أو عدودة. واذا كانت متزايدة فإن

$$f(a+0)-f(a)+\sum_{k=1}^{\infty}\big(f(x_k+0)-f(x_k-0)\big)+f(b)-f(b-0)\le f(b)-f(a)$$

الاشتقاق:

نقول عن الدالة f معرفة على $[a.b]$ أنها قابلة للاشتقاق عند $x_0 \in]a.b[$ اذا كانت معرفة في جوار النقطة x_0 وتحقق الشرط:

$$\exists A \in \mathbb{R};\quad \lim_{\substack{> \\ x\to x_0 \\ <}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = A$$

نرمز لمشتق النقطة عند الـ x_0 بـ $f'(x_0)$

ملاحظة: بالنهايات والاستمرار والاشتقاق غيري ضروري أن يكون الدالة معرفة عن النقطة المدروسة

الاشتقاق على مجال مغلق $[a.b]$:

نقول عن الدالة أنها قابلة للاشتقاق على مجال مغلق اذا كان:

1) f قابلة للاشتقاق عند كل نقاط $]a.b[$

2)قابلة للاشتقاق من اليمين عند a أي:

$$\lim_{\substack{x\to a \\ >}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a+0) \in \mathbb{R}$$

3)قابلة للاشتقاق من اليسار عند b أي:

$$\lim_{\substack{x\to b \\ <}} \frac{f(x)-f(b)}{x-b} = f'(b-0) \in \mathbb{R}$$

عندها نقول أن f قابلة للاشتقاق (اشتقاقية) على المجال المغلق $[a,b]$.

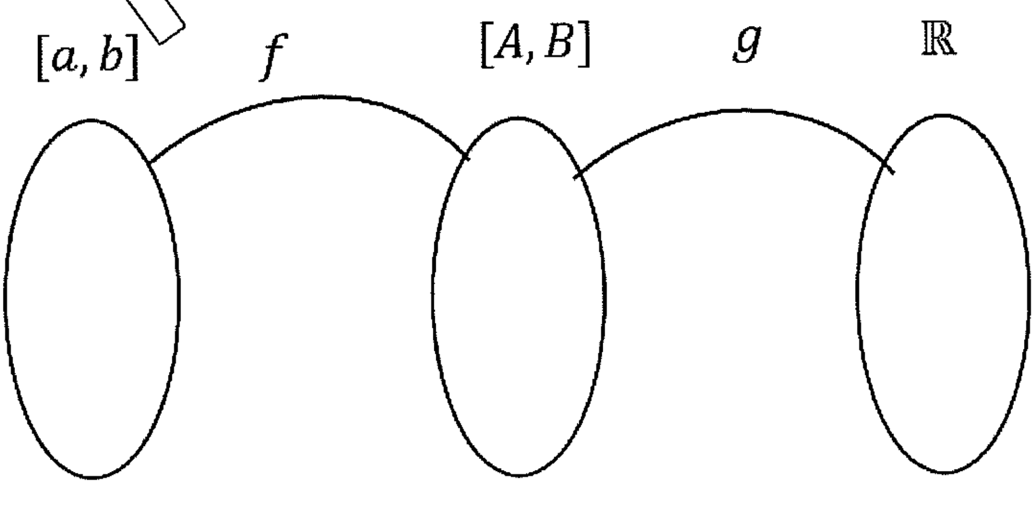
مبرهنة: اذا كانت f معرفة ومستمرة على $[a,b]$ وكانت f قابلة للاشتقاق عند $x_0 \in]a,b[$ عندئذ:

1) الشرط اللازم والكافي لتكون f متزايدة هو أن يكون $f'(x) \geq 0$

2) الشرط اللازم والكافي لتكون f متناقصة هو أن يكون $f'(x) \leq 0$

الدوال المركبة:

ليكن لدينا $f: [a.b] \to [A.B]$ و $g: [A.B] \to \mathbb{R}$



$gof: [a.b] \to \mathbb{R}$

ملاحظة: بالحالة العامة يكفي أن يكون مستقر f محتواة في منطلق g

مبرهنة:

اذا كانت f متزايدة على $[a.b]$ وكانت g مطردة على $[A.B]$ فأن gof مطردة

حالات خاصة:

- اذا كانت g متزايدة على $[A.B]$ فإن gof متزايدة.
- اذا كانت g متناقصة على $[A.B]$ فإن gof متناقصة

تمارين:

1)اذا كانت f دالة متزايدة على المجال $[a.b]$ و كانت g دالة متزايدة على المجال $[a.b]$ والمطلوب:

ابحث في تزايد أو عدم تزايد الدوال:

$$\frac{f}{g}\ .f*g\ .f-g\ .f+g$$

2)اذا كانت f دالة متناقصة على المجال $[a.b]$ و كانت g دالة متناقصة على المجال $[a.b]$ والمطلوب:

ابحث في تناقص أو عدم تناقص الدوال:

$$\frac{f}{g}\ .f*g\ .f-g\ .f+g$$

$f+g$ متزايدة لأن

f متزايد أي $\forall x_1.x_2\in[a.b];x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)\le f(x_2)\ ....1$

g متزايد أي: $\forall x_1.x_2\in[a.b];x_1<x_2\Rightarrow g(x_1)\le g(x_2)\ ....2$

المطلوب: $\forall x_1.x_2\in[a.b];x_1<x_2\Rightarrow (f+g)(x_1)\le (f+g)(x_2)$

من 1 و2 نجد أن:

$$f(x_1)+g(x_1)\le f(x_2)+g(x_2)\Longrightarrow (f+g)(x_1)\le (f+g)(x_2)$$

وهو المطلوب

$f-g$ ليس متزايد دوماً لنأخذ مثال:

$$f(x)=x^2;x\in[0.2]$$
$$g(x)=x\ ;x\in[0.2]$$
$$f'(x)=2x>0;x\in[0.2]\Longrightarrow f\text{متزايدة}$$
$$g'(x)=1>0\ \ ;x\in[0.2]\Longrightarrow g\text{متزايدة}$$
$$d(x)=f(x)-g(x)=x^2-x$$
$$d'(x)=2x-1\Longrightarrow 2x-1=0\Longrightarrow x=\frac{1}{2}$$

x	0		$\frac{1}{2}$		2
$d(x)$		-	0	+	
		↘		↗	

ومنه الدالة متزايدة على جزء من المجال ومتناقصة على جزء أخر أي أنها غير متزايدة دوماً

$f * g$ ليس متزايد دوماً

$$f(x) = x \qquad ; x \in [0,2]$$
$$g(x) = x - 1 \,; x \in [0,2]$$
$$f'(x) = 1 > 0; x \in [0,2] \Longrightarrow f \text{ متزايدة}$$
$$g'(x) = 1 > 0 \;; x \in [0,2] \Longrightarrow g \text{ متزايدة}$$
$$d(x) = f(x) * g(x) = x^2 - x$$
$$d'(x) = 2x - 1 \Longrightarrow 2x - 1 = 0 \Longrightarrow x = \frac{1}{2}$$

x	0		$\frac{1}{2}$		2
$d(x)$		-	0	+	
		↘		↗	

ومنه الدالة متزايدة على جزء من المجال ومتناقصة على جزء أخر أي أنها غير متزايدة دوماً

$\frac{f}{g}$ ليست متزايدة دوماً لأن

$$f(x) = x \qquad ; x \in [0,2]$$
$$g(x) = x - 1 \,; x \in [0,2]$$
$$f'(x) = 1 > 0; x \in [0,2] \Longrightarrow f \text{ متزايدة}$$
$$g'(x) = 1 > 0 \;; x \in [0,2] \Longrightarrow g \text{ متزايدة}$$
$$d(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x}{x-1}$$
$$d'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} < 0$$

أي أنها ليست متزايدة على هذا المجال

يترك التمرين الثاني للقارء بنفس الطريقة

Math Mad Team

انتهت المحاضرة

إعداد: عبد الرحمن خادم الجامع، سمير حاج علي.